

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ 2024

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό Βιβλίο σελ. 76

A2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 155

A3. Σχολικό βιβλίο σελ. 216

A4.

- α) Σωστό
- β) Σωστό
- γ) Λάθος
- δ) Λάθος
- ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. Η συνάρτηση f ορίζεται στο $D_f = D_g \cap D_h - \{x \in D_{g \cap h} / h(x) = 0\}$.

Λύνω για $x \geq 1$ την

$$h(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Επίσης $D_g \cap D_h = [1, +\infty)$

Άρα $D_f = (1, +\infty)$ με

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{x-1} = \frac{x+1}{x-1}$$

Η συνάρτηση r ορίζεται στο $D_r = D_g \cap D_h = [1, +\infty)$ με

$$r(x) = g(x) \cdot h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \sqrt{x}^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 = x - \frac{1}{x}$$

B2. Η f παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ ως ρητή με

$$f'(x) = \frac{(x+1)' \cdot (x-1) - (x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2} = -\frac{2}{(x-1)^2}$$

Είναι $f'(x) < 0$ για κάθε $x > 1$ οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$, δηλαδή είναι 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

Αφού f γνησίως φθίνουσα και συνεχής τότε

$$D_{f^{-1}} = f((1, +\infty)) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (1, +\infty)$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[(x+1) \cdot \frac{1}{x-1} \right] = 2 \cdot (+\infty) = +\infty$$

καθώς $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x-1) = 0$ και $x-1 > 0$ για $x > 1$.

Για $x \in D_f$ και $y \in D_{f^{-1}}$ θέτω

$$\begin{aligned} f(x) = y &\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x+1 = xy - y \Leftrightarrow xy - x = y+1 \Leftrightarrow \\ (y-1)x &= y+1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{y-1} \Leftrightarrow f^{-1}(y) = \frac{y+1}{y-1} \end{aligned}$$

Οπότε

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad x > 1$$

Αφού $D_f = D_{f^{-1}}$ και $f(x) = f^{-1}(x)$ για κάθε $x > 1$ τότε οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες.

B3. Η r δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες αφού είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$.

Εξετάζω για ασύμπτωτες στο $+\infty$.

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1$$

Άρα, $\lambda = 1$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (r(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) = 0$$

Άρα, $\beta = 0$.

Επομένως η r έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x$.

B4. Για $x > 1$ η εξίσωση γράφεται

$$\begin{aligned} (f^{-1}f(x))^2 &= 1 + 4r(x) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4x - \frac{4}{x} \Leftrightarrow \\ x^3 &= x + 4x^2 - 4 \Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^2(x-4) - (x-4) = 0 \Leftrightarrow \\ (x-4)(x^2-1) &= 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = \pm 1 \end{aligned}$$

Όμως $x > 1$ άρα η $x = 4$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Αφού f συνεχής τότε θα είναι συνεχής και στο 2, δηλαδή

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$$

Όμως

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (-2x + 4 + e^\lambda) = e^\lambda$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (-x^2 + 4x - 3 + \lambda) = -4 + 8 - 3 + \lambda = \lambda + 1$$

και

$$f(2) = \lambda + 1$$

Άρα $e^\lambda = \lambda + 1$ (1).

Από εφαρμογή του σχολικού βιβλίου, ισχύει ότι $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 0$.

Άρα η (1) έχει μοναδική λύση την $\lambda = 0$.

Γ2. Για $\lambda = 0$ είναι

$$f(x) = \begin{cases} -2x + 5, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2 + 4x - 3, & x \geq 2 \end{cases}$$

Για $x \in (0,2)$ η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2 < 0$ για κάθε $x \in (0,2)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2)$.

Για $x > 2$ η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = -2x + 4 < 0$ για κάθε $x > 2$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$.

Αφού f συνεχής στο 2 τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.

Τέλος η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0 το $f(0) = 5$.

Γ3.

i) Η f είναι συνεχής στο $[0,3]$.

Εξετάζω αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 2.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 5 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2x + 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-2(x - 2)}{x - 2} = -2$$

και

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-x^2 + 4x - 3 - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x - 2)^2}{x - 2} = 0$$

Άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 2, οπότε δεν ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο $[0,3]$.

ii) Η ευθεία που διέρχεται από τα $\Delta(0, f(0))$ και $E(3, f(3))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης

$$\lambda = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = -\frac{5}{3}$$

Για να είναι η εφαπτομένη της C_f στο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα Δ και E , αρκεί

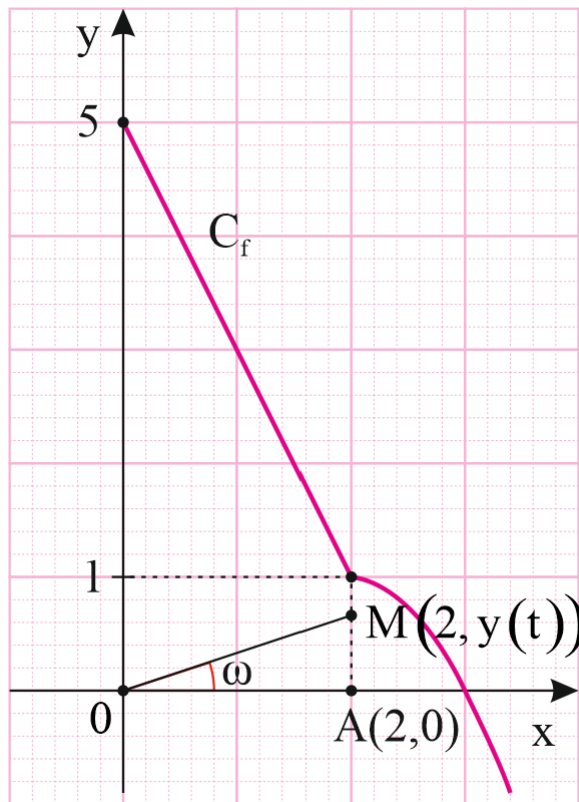
$$f'(\xi) = \lambda \Leftrightarrow f'(\xi) = -\frac{5}{3}$$

Αν $\xi \in [0,2)$: $f'(\xi) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2 = -\frac{5}{3}$, άτοπο.

Αν $\xi \in (2,3)$: $f'(\xi) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2\xi + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow \xi = \frac{17}{6}$, δεκτή

Άρα, η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\Gamma\left(\frac{17}{6}, f\left(\frac{17}{6}\right)\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα Δ, E .

Γ4.



Ισχύει ότι $y'(t) = 0,5$ μον. μηκους/sec. Έστω $M(2, y(t))$ το κινητό σημείο και

$$\varepsilon\varphi(\omega(t)) = \frac{y(t)}{2}$$

Παραγωγίζοντας την παραπάνω προκύπτει ότι

$$\frac{1}{\sin^2(\omega(t))} \cdot \omega'(t) = \frac{y'(t)}{2} \Leftrightarrow \frac{\eta\mu^2(\omega(t)) + \sigma\upsilon\nu^2(\omega(t))}{\sigma\upsilon\nu^2(\omega(t))} \cdot \omega'(t) = \frac{y'(t)}{2}$$

$$\Leftrightarrow (1 + \varepsilon\varphi^2(\omega(t))) \cdot \omega'(t) = \frac{y'(t)}{2}$$

Έστω t_0 η χρονική στιγμή που το κινητό συναντάει τη C_f δηλαδή το σημείο $(2, f(2))$.

Για $t = t_0$ ισχύει ότι

$$\varepsilon\varphi(\omega(t_0)) = \frac{f(2)}{2} = \frac{1}{2}$$

και

$$\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \cdot \omega'(t_0) = \frac{0,5}{2} \Leftrightarrow \frac{5}{4} \cdot \omega'(t_0) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \omega'(t_0) = \frac{1}{5} \text{ rad/sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως ηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με:

$$f'(x) = \frac{(\ln x + ax)' \cdot x - (\ln x + ax) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\left(\frac{1}{x} + a\right) \cdot x - (\ln x + ax)}{x^2}$$

$$= \frac{1 + ax - \ln x - ax}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Για κάθε $x > 0$ λύνω:

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = e$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > e$

Το πρόσημο της f' , η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον ακόλουθο πίνακα:

x	0	e
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	↗	↘

O.M.

Η f παρουσιάζει μέγιστο στο e , το

$$f(e) = \frac{1 + ae}{e}$$

Από το σύνολο τιμών παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή της f είναι το

$$1 + \frac{1}{e}$$

δηλαδή

$$f(e) = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1 + a \cdot e}{e} = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow \frac{1}{e} + a = 1 + \frac{1}{e} \Leftrightarrow a = 1$$

42. Στο $\Delta_1 = (0, e]$ η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής οπότε

$$f(\Delta_1) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), f(e) \right] = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e} \right]$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{x} \cdot (\ln x + 1) \right] = (+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$$

Στο $\Delta_2 = [e, +\infty)$ η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής οπότε

$$f(\Delta_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(e) \right] = \left(1, 1 + \frac{1}{e} \right]$$

διότι

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + x}{x} \stackrel{\left(\frac{\infty}{\infty} \right)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} + 1}{1} = 1$$

Αφού $0 \notin f(\Delta_2)$ η εξίσωση $f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο Δ_2 .

Αφού $0 \in f(\Delta_1)$ τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in \Delta_1$ η οποία είναι μοναδική αφού f γνησίως αύξουσα στο Δ_1 .

Είναι

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\ln \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{-2 \ln 2 + 1}{\frac{1}{2}} = -2 \ln 2 + 1 < 0$$

και

$$f(1) = 1$$

Αφού

$$-2 \ln 2 + 1 < 0 < 1 \Leftrightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) < f(x_0) < f(1) \stackrel{f \nearrow}{\Leftrightarrow} \frac{1}{2} < x_0 < 1$$

43.

- i) Παρατηρούμε ότι η $x_2 = 4$ είναι προφανής λύση και αφού f γνησίως φθίνουσα, άρα και $1 - 1$ στο Δ_2 η x_2 είναι μοναδική λύση στο Δ_2 .

Επίσης

$$f(4) = \frac{\ln 4 + 4}{4} = \frac{2\ln 2 + 4}{4} = \frac{\ln 2 + 2}{2} = f(2)$$

Οπότε το $x = 2$ είναι λύση της εξίσωσης $f(x) = f(4)$ και είναι μοναδική στο Δ_1 αφού f γνησίως αύξουσα στο Δ_1 .

ii)

$$2^x \leq x^2 \iff \ln 2^x \leq \ln x^2 \iff x \ln 2 \leq 2 \ln x \iff \frac{x > 0 \ln 2}{2} \leq \frac{\ln x}{x} \iff f(x) \geq f(2)$$

$$\text{Για } x \in (0, e]: f(x) \geq f(2) \iff x \geq 2$$

Άρα $x \in (2, e]$.

$$\text{Για } x \in [e, +\infty): f(x) \geq f(4) \iff x \leq 4$$

Άρα $x \in [e, 4]$.

Οπότε η ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in [2, 4]$.

44. Για το ζητούμενο εμβαδό ισχύει

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\ln 2}^0 |g(x)| dx = \int_{-\ln 2}^0 \left| f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x} \right| dx = \int_{-\ln 2}^0 \left| e^x f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^{2x}} \right| dx \\ &= \int_{-\ln 2}^0 e^x \left| f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^{2x}} \right| dx = \int_{-\ln 2}^0 e^x \left| f(e^x) \cdot \frac{1 - \ln e^x}{e^{2x}} \right| dx \\ &= \int_{-\ln 2}^0 e^x |f(e^x) \cdot f'(e^x)| dx \end{aligned}$$

Θέτοντας $e^x = u \iff x = \ln u$ έχουμε ότι $e^x dx = du$.

Για $x = -\ln 2 = \ln 2^{-1}$ έχω $u = \frac{1}{2}$.

Για $x = 0$ έχω $u = 1$.

Άρα

$$E = \int_{1/2}^1 |f(u) \cdot f'(u)| du$$

Από Δ2 ερώτημα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Για

$$\frac{1}{2} \leq x \leq x_0 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x) \leq f(x_0) \Leftrightarrow f(x) \leq 0$$

Για

$$x_0 \leq x \leq 1 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_0) \leq f(x) \Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

Ισχύει επίσης ότι $f'(u) > 0$ για κάθε $u \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ από Δ1.

Οπότε

$$\begin{aligned} E &= - \int_{\frac{1}{2}}^{x_0} f(u) \cdot f'(u) du + \int_{x_0}^1 f(u) \cdot f'(u) du = - \left[\frac{f^2(u)}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \left[\frac{f^2(u)}{2} \right]_{x_0}^1 \\ &= - \frac{f^2(x_0)}{2} + \frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{f^2(1)}{2} - \frac{f^2(x_0)}{2} = \frac{\left(2 \ln \frac{1}{2} + 1\right)^2}{2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{(-2 \ln 2 + 1)^2}{2} + \frac{1}{2} \text{ τ.μ} \end{aligned}$$